الباب السابع
اختبارات الفروض

مقدمة

سوف نتناول فى هذا الفصل الجزء الثانى من الاستدلال الإحصائى وهو إختبارات الفـروض. يحاول الباحث اتخاذ قرار ما لمشكلة محددة بشأن خواص توزيع ما (المتوسط – النسبة) لعينة عشوائية تم سحبها من المجتمع "العينة المسحوبة لابد وأن تكون ممثلة تمثيلا جيدا للمجتمع محل الدراسة". ولكى نصل إلى قرار إحصائى لابد من وضع فروض عن خواص المجتمع، ومن هنا نختبر مدى صحة هذا الفرض من عدمه وذلك عن طريق العينة العشوائية التى تم سحبها من المجتمع.

وهذه الفروض هى مانطلق عليه الفروض الإحصائية Statistical Hypothesis.

وتنقسم اختبارات الفروض الإحصائية إلى قسمين:

أولا: اختبارات الفروض الإحصائية المعلمية: وفى هذا القسم يكون معلوم لدينا التوزيع الـذى تتبعـه البيانات التى لدينا وما إذا كان توزيعا متصلاً أم منفصلاً (متقطعا) ويكون المطلوب هو اختبار فروض حول معالم المجتمع.

ثانيا: اختبارات الفروض الإحصائية اللامعلمية: فى كثير من التجارب والأبحاث يكون لـدينا بيانـات واقعية يصعب من خلالها التعرف على التوزيع الذى تتبعة ومن هنا نشأت الحاجة إلـى مـا يعـرف باختبارات الفروض اللامعلمية حيث لاتحتاج مثل هذه الاختبارات معرفة شكل التوزيع الـذى تتبعـه البيانات محل الدراسة، كما يفضل استخدامها عندما يكون حجم العينة المسحوبة من المجتمع صـغيرا نسبيا. وسوف نهتم فى فصلنا هذا بالقسم الأول وهو اختبارات الفروض الإحصائية المعلمية.

٧-١ اختبارات الفروض الإحصائية المعلمية
Parametric Statistical Test of Hypothesis

عند القيام باختبار إحصائى يكون لدينا فرضان:

الفرض الأول: هو ما يسمى بفرض العدم Null Hypothesis وسوف نرمز له بالرمز H_o.

الفرض الثاني: يسمى بالفرض البديل Alternative Hypothesis ويرمز له بالرمز H_1.

وكما ذكرنا من قبل تعتمد اختبارات الفروض على بيانات العينة وفرض قيمة معينة لمعلمة من معالم المجتمع حيث يكون الاختبار: هل هناك فرق بين قيمة معلمة المجتمع المفروضة والقيمة المقدرة لها من خلال بيانات العينة؟ فإذا كان هناك فرق فهل يرجع هذا الفرق إلى خطأ المعاينة؟ أم هو فـرق حقيقى "معنوي" Significant. فإذا كان الفرق معنويا فيكون القرار هو عدم قبول الفـرض العـدمى وعليه فإننا نقبل بالفرض البديل. أما إذا كان الفرق غير معنوى فإننا نقبل الفرض العدمي.

٢-٧ أنواع الأخطاء

الخطأ من النوع الأول α والخطأ من النوع الثانى β

إن أى قرار إحصائى يمكن أن ينتج عنه نوعان من الخطأ:

خطأ من النوع الأول: يحدث هذا النوع من الأخطاء عندما نقوم برفض الفرض العدمى H_o فى حـين أنه صحيح، وذلك باحتمال مقداره α (وتسمى α بمستوى المعنوية وهى تأخذ قيمـا صـغيرة (٠,٠١، ٠,٠٥،...).

خطأ من النوع الثاني: يقع مثل هذا الخطأ عندما نقبل الفرض العدمى H_o فى حين أنه خطـأ وذلـك باحتمال مقدارة β.

ويمكن تلخيص القرارات الإحصائية بالجدول التالي:

القرار / الفرض	قبول H_o	رفض H_o
H_o صحيح	قرار صحيح	خطأ من النوع الأول α
H_o خطأ	خطأ من النوع الثانى β	قرار صحيح

ولاختبار صحة فرض العدم H_o يجب أن نكون إحصاءة (دالة من مشاهدات العينة العشوائية) حيث يكون توزيع الإحصاءة معروف ويتم تقسيم المجال المقابل لهذه الدالة إلى قسمين (منطقتين):

المنطقة الأولى: تسمى منطقة القبول حيث يتم قبول الفرض العدمى ويكون احتمال حدوث قيم الإحصاءة (α -1) كبيرا.

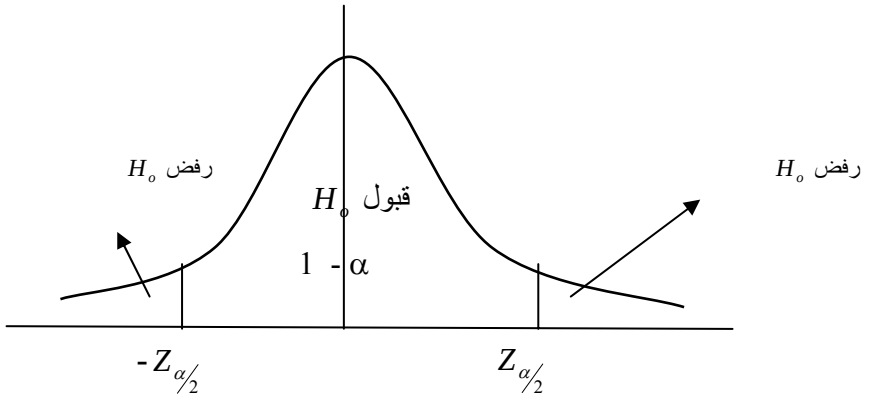
المنطقة الثانية: تسمى منطقة الرفض حيث يتم رفض الفرض العدمى ويقبل الفرض البديل ويكون احتمال حدوث قيم الإحصاءة α صغيرا.

الأشكال التالية يمكن من خلالها توضيح مناطق الرفض والقبول وذلك حسب نوع الفرض البديل، وسوف نوضح ذلك باستخدام المتوسط μ (متوسط المجتمع) كالتالي:

١- الاختبار من طرفين: يسمى الاختبار الإحصائى اختبارا ذا طرفين إذا كان على الصورة:

$H_o: \mu = \mu_o$

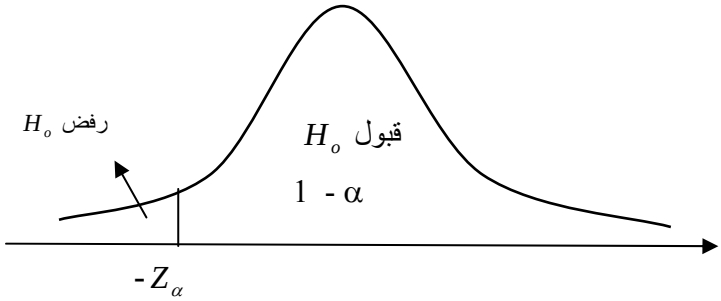
$H_1: \mu \neq \mu_o$



٢- الاختبار من طرف واحد أدنى: يسمى الاختبار الإحصائى اختبارا ذا طرف واحد أدنى إذا كان على الصورة:

$H_o: \mu = \mu_o$

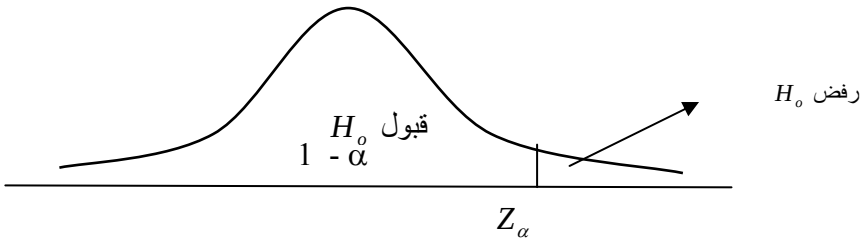
$H_1: \mu < \mu_o$



٣- الاختبار من طرف واحد أعلى: يسمى الاختبار الإحصائى اختبارا ذا طرف واحد أعلى إذا كان على الصورة:

$H_o: \mu = \mu_o$

$H_1: \mu > \mu_o$



٣-٧ اختبارات الفروض لمتوسط المجتمع μ

١ - تباين المجتمع معلوم

عندما يكون الانحراف المعيارى σ للمجتمع معلوم فإن الإحصائية $Z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}$ يكون لها التوزيع الطبيعى المعياري، أى أن:

$$Z \sim N(0,1)$$

وتسمى الإحصائية بقيمة Z المحسوبة من خلال بيانات العينة و $\bar{x}$ يمثل متوسط البيانات المشاهدة من العينة، n تمثل حجم العينة المسحوبة من المجتمع و μ_o هو القيمة المفروضة لمتوسط المجتمع والتى نقوم باختبارها. نقوم بعد ذلك بإختيار قيمة α (مستوى المعنوية) حيث يتم على أساسة تحديد القيم الحرجة $Z_{\alpha/2}$ و $-Z_{\alpha/2}$ أو Z_α وذلك حسب نوع الاختبار هل هو اختبار من طرف واحد أم من طرفين، وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال (١): أخذت عينة من ٦٤ طالب من إحدى المدارس فوجد أن متوسط الطول هو ١٥٥ سم. فإذا كان الانحراف المعيارى للمجتمع يساوى ٥ سم. اختبر الفرض القائل:

$$H_o: \mu = 160 \quad , \quad H_1: \mu \neq 160$$

وذلك عند مستوى معنوية:

أ- ٠,٠٥

ب- ٠,٠١

الحل:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}$$

حيث:

$$\bar{x} = 155, \qquad \mu_o = 160, \qquad \sigma = 5, \qquad n = 64$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\Rightarrow Z = \frac{155 - 160}{\frac{5}{\sqrt{64}}},$$

$$Z = -8 \qquad (1)$$

وهذه تمثل قيمة Z المحسوبة.

أ- عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.05$) وبما أن الاختبار من طرفين إذا قيم Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.05/2} = Z_{0.025}$$
$$Z_{0.025} = 1.96$$

وعليه فإن قيمة $-Z_{\alpha/2}$ ستكون:

$$-Z_{\alpha/2} = -1.96$$

ومن هنا نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أى أن قيمة Z تقع فى منطقة الرفض، ومن هنا يتم رفض الفرض العدمى بأن $\mu = 160$.

ب- عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.01$) وبما أن الاختبار من طرفين إذا قيم Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0.01/2} = Z_{0.005}$$
$$Z_{0.005} = 2.58$$

وعليه فإن قيمة $-Z_{\alpha/2}$ ستكون:

$$-Z_{\alpha/2} = -2.58$$

ومن هنا نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أى أن قيمة Z تقع فى منطقة الرفض، ومن هنا يتم رفض الفرض العدمى بأن $\mu = 160$.

مثال (٢): إذا كان أحد مصانع المواد الغذائية ينتج نوعا من الألبان حيث يصل متوسط وزن العبوة ٢٤٠ جرام، وذلك بانحراف معيارى ١٨ جرام حيث كانت أوزان العبوات تتبع التوزيع الطبيعي. تم أخذ عينة من ٩ عبوات وذلك عند إجراء اختبار الرقابة على الجودة فوجد أن متوسط وزن العبوة ٢٣٥ جرام. هل ترى أن هناك عيبا بالإنتاج مما أدى إلى انخفاض متوسط وزن العبوة؟ مستوى المعنوية ١٠%.

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$$H_o: \mu = 240$$
$$H_1: \mu < 240$$

٢- نقوم بحساب قيمة Z المحسوبة

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}$$

حيث:

$\bar{x} = 235, \quad \mu_o = 240, \quad \sigma = 18, \quad n = 9$

$\alpha = 0.01$

$$\Rightarrow Z = \frac{235 - 240}{\frac{18}{\sqrt{9}}},$$

$Z = -0.83 \quad (1)$

وهذه تمثل قيمة Z المحسوبة.

٣- نقوم الأن بحساب قيمة Z الجدولية

عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.1$) وبما أن الاختبار من طرف واحد إذا قيمة Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$-Z_{\alpha} = -Z_{0.1}$$

$-Z_{0.1} = -1.28 \quad (2)$

من (١) و (٢) نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أى أن قيمة Z تقع فى منطقة القبول، ومن هنا يتم قبول الفرض العدمى بأن $\mu = 240$.

درجات الحرية

إذا كان لينا مجتمع ما ونريد تقدير عدد من معالم هذا المجتمع كالمتوسط والانحراف المعيارى إلى آخره وتم سحب عينة من البيانات المستقلة التى تمثل ذلك المجتمع حجمها n فإن درجات الحرية التى يرمز لها بالرمز v تساوى حجم العينة مطروحا منه عدد المعالم المراد تقديرها ويمكن التعبير عن ذلك من خلال العلاقة التالية:

$$v = n - k$$

حيث k هى عدد المعالم المقدرة.

٢- تباين المجتمع مجهول وحجم العينة صغير

عندما يكون الانحراف المعيارى للمجتمع مجهول وكذلك حجم العينة المسحوبة من ذلك المجتمع صغير (< ٣٠) فإن الإحصائية Z يتم تغيرها إلى الإحصائية t التى يكون لها الشكل التالي:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_o}{S/\sqrt{n}}$$

حيث S تمثل الانحراف المعيارى للعينة والإحصائية t تتبع توزيع t وذلك بدرجات حرية $(v = n - 1)$ ومستوى معنوية α أو $\alpha/2$ حسب نوع الاختبار من طرف واحد أو طرفين، وسـوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٣): إذا كان متوسط ربح سهم إحدى الشركات هو ١٥ جنيه فى العام الماضي. تم أخذ عينة من ٧ مساهمين عن توقعاتهم عن متوسط ربح السهم العام الحالى فوجد أنه ١٧ جنية بانحراف معيارى ٢. هل توافق المساهمين فى تقديرهم لارتفاع متوسط ربح السهم هذا العام؟ وذلك بمستوى معنوية 0%.

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$H_o: \mu = 15$

$H_1: \mu > 15$

٢- نقوم بحساب قيمة t المحسوبة

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_o}{S/\sqrt{n}}$$

حيث:

$\bar{x} = 17, \quad \mu_o = 15, \quad S = 2, \quad n = 7$

$\alpha = 0.05$

$$\Rightarrow t = \frac{17-15}{\frac{2}{\sqrt{7}}},$$

$t = 2.65 \qquad (1)$

وهذه تمثل قيمة t المحسوبة.

٣- نقوم الآن بحساب قيمة t الجدولية.

عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.05$) وبما أن الاختبار من طرف واحد إذا قيمة t الجدولية سوف تكـون كالتالي:

$t_{(n-1,\alpha)} = t_{(7-1,0.05)}$

$t_{(6,0.05)} = 1.943 \qquad (2)$

من (١) و (٢) نجد أن قيمة t المحسوبة أكبر من قيمة t الجدولية، أى أن قيمـة t تقـع فـى منطقة الرفض، ومن هنا يمكن القول بأننا نوافق المساهمين على توقعهم بارتفاع متوسط ربح الـسهم هذا العام.

٧-٤ اختبارات الفروض للفرق بين متوسطى مجتمعين

العينات الكبيرة المستقلة

هناك العديد من الأبحاث التى يكون المطلوب فيها المقارنة بين مجتمعين مختلفين أو منطقتـين مختلفتين أو أسلوبين لتدريس مقرر ما...إلخ. من هنا جاء اختبار الفرق بين متوسطى المجتمعين عـن

طريق سحب عينة من كل مجتمع ويكون الاختبار لنرى الفرق بين متوسطى العينتين، وهل هو فـرق حقيقى أم يرجع هذا الفرق إلى الصدفة البحتة.

إذا كان متوسط العينة الأولى $\bar{x}_1$ ومتوسط العينة الثانية $\bar{x}_2$ بانحراف معيارى S_1 و S_2 على الترتيب وكان حجم العينة الأولى n_1 وحجم العينة الثانية n_2 فإن توزيع المعاينة للفرق $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ يقتـرب مـن التوزيع الطبيعى بمتوسط $\mu_1 - \mu_2$ وانحراف معيارى $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ حيث:

μ_1 هى متوسط المجتمع الأول وμ_2 متوسط المجتمع الثانى و(σ_1^2 ، σ_2^2) يمثلان تباين المجتمع الأول والثانى على التوالي. ويكون فرض العدم والفرض البديل على الصورة:

$H_o: \mu_1 - \mu_2 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad H_o: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2,$

or $H_1: \mu_1 < \mu_2,$

or $H_1: \mu_1 > \mu_2$

هذا وتأخذ الإحصاءة Z الشكل التالي:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_o}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

نلاحظ من شكل العلاقة السابقة أن (σ_1^2 ، σ_2^2) مجهولتين، ولذا تم التعويض بتباين العينة الأولى وتباين العينة الثانية مع كبر حجم العينتين ($n_1 >$ ٣٠) و ($n_2 >$ ٣٠).

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

مثال (٤): إذا اختيرت عينة عشوائية من ٦٠ طالب من جامعة خاصة، فوجد أن متوسط ذكائهم ٦٩ درجة وتباين قدرة ٢٣٠ درجة، كذلك تم اختيار عينة عشوائية أخرى من ٨٥ طالب من جامعة حلوان فوجد أن متوسط ذكائهم ٧٤ درجة وتباين قدرة ٢١٥ درجة. اختبر الفرض القائل بأن متوسط ذكاء طالب الجامعة الخاصة أقل من متوسط ذكاء طالب جامعة حلوان.

وذلك بمستوى معنوية ($\alpha = 0.05$).

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$H_o: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 < \mu_2$

٢- نقوم بحساب قيمة Z المحسوبة

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_o}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$Z = \frac{(69 - 74) - 0}{\sqrt{\frac{230}{60} + \frac{215}{85}}}$$

$$Z = \frac{-5}{\sqrt{6.36}}$$

$$Z = -1.98, \qquad (1)$$

٣- نقوم بحساب قيمة Z الجدولية

عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$ وبما أن الاختبار من طرف واحد إذا قيمة Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$-Z_{\alpha} = -Z_{0.05}$$

$$-Z_{0.05} = -1.65 \qquad (2)$$

من (١) و (٢) نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أى أن قيمة Z تقع فى منطقة الرفض، ومن هنا يمكن القول بأن متوسط ذكاء طلبة الجامعة الخاصة أقل من متوسط ذكاء طلبة جامعة حلوان.

٢- العينات الصغيرة المستقلة

لقد وجد الإحصائيون أن الفرق بين المتوسطين $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ عندما يكون حجم العينتين المستقلتين n_1 ، n_2 صغيرا وتباين المجتمع الأول والثانى مجهول فإن الإحصائية:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_o}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

حيث:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

تتبع توزيع t بدرجات حرية $(v = n_1 + n_2 - 2)$. وسوف نوضح طريقة الاختبار تلك بالمثال التالي:

مثال (٥): اختيرت عينة عشوائية من ١١ طالب من كلية التجارة جامعة القاهرة فوجد أن متوسط ذكائهم ٨٠ درجة بانحراف معيارى ٧ درجات. كذلك اختيرت عينة عشوائية من ٦ طلاب من كلية الآداب جامعة القاهرة أيضا فوجد أن متوسط ذكائهم ٧٥ درجة بانحراف معيارى ٥ درجات. هل يمكننا القول بأن متوسط ذكاء طلبة التجارة لا يساوى متوسط ذكاء طلبة الآداب وذلك عند مستوى معنوية ٥%.

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$H_o: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

٢- نقوم بحساب قيمة S_p^2 كالآتي:

$$1- \ S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$S_p^2 = \frac{(11-1)(7)^2 + (6-1)(5)^2}{11+6-2}$$

$$S_p^2 = \frac{10\times 49 + 5\times 25}{15}$$

$$S_p^2 = 41 \qquad (1)$$

٣- نقوم بحساب قيمة t المحسوبة.

$$2- \ t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_o}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

$$t = \frac{(80-75)-0}{\sqrt{41(\frac{1}{11} + \frac{1}{6})}}$$

$$t = \frac{5}{\sqrt{10.56}}$$

$$t = 1.54 \qquad (2)$$

٤- نقوم الأن بحساب قيمة t الجدولية.

عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.05$) وبما أن الاختبار من طرفين فإن قيم t الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$t_{(n_1+n_2-2,\ \alpha/2)} = t_{(11+6-2,0.025)}$$

$$t_{(15,0.025)} = \pm 2.131 \qquad (3)$$

من (٢) و (٣) نجد أن قيمة t المحسوبة تقع بين قيم t الجدولية، أى أن قيمة t تقع فى منطقة القبول، أى أن متوسط ذكاء طلبة كلية التجارة مساو لمتوسط ذكاء طلبة كلية الآداب.وذلك عند مستوى معنوية ٥%.

٣- العينات الغير مستقلة

لقد بينا فى الحالات السابقة كيفية إجراء الاختبار فى حالة العينات المستقلة، ولكن فى بعض الأحيان نجد أن العينات التى تم سحبها بطريقة عشوائية هى عينات غير مستقلة بمعنى وجود علاقة

بين مشاهدات العينتين، وفى هذه الحاله نقوم بحساب الفرق بين أزواج المشاهدات ثم إيجاد متوسط هذا الفرق وأيضا الانحراف المعيارى له. ونظرا لأن التباين يكون مجهولا، كذلك صغر حجـم العينتـين سوف تتبع الإحصاءة $t = \frac{\bar{d} - \overline{D}_o}{s_d / \sqrt{n}}$ توزيع t بدرجات حرية $(v = n-1)$ حيث:

$\bar{d}$ هى متوسط الفرق بين أزواج المشاهدات.

s_d هو الانحراف المعيارى للفرق بين أزواج المشاهدات.

n تمثل حجم العينة المسحوبه من المجتمع (عدد أزواج المشاهدات).

$\overline{D}_o$ هو الفرق بين متوسطى المجتمعين الأول والثاني.

ويكون فرض العدم والفرض البديل على الصورة:

$H_o: \overline{D}_o = 0, \quad \Leftrightarrow \quad H_o: \overline{D}_o = \mu_1 - \mu_2$

$H_1: \overline{D}_o \neq 0,$

or $\quad H_1: \overline{D}_o < 0,$

or $\quad H_1: \overline{D}_o > 0$

المثال التالى سوف يوضح كيفية حساب الإحصاءة t كذلك أسلوب إجراء الاختبار.

مثال (٦): يرغب أحد المحاسبين فى مقارنة المبيعات اليومية لأحد المطاعم فرع القاهرة مع المبيعات اليومية لذات المطعم فرع الاسكندرية وذلك فى خلال سبعة أيام اختيرت عشوائيا على مدار الشهر.

	المبيعات	
اليوم	فرع القاهرة	فرع الأسكندرية
١	١٥٤٠	١٦٧٠
٢	١٢١٢	١٧٨٠
٣	١٧٠٠	١٨٨٠
٤	١٠٦٤	١٩٦٨
٥	١١٩٥	٢٤٣٠
٦	١٤٥٠	٢١٤٥
٧	١٥٠٥	٢١٣٦

اختبر الفرض القائل بعدم وجود فرق بين متوسطى الفرعين وذلك بمستوى معنوية ٥%.

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$H_o: \overline{D}_o = 0$

$H_1: \overline{D}_o \neq 0$

٢- نقوم بحساب قيمة t المحسوبة.

$$t = \frac{\bar{d} - \bar{D}_o}{s_d / \sqrt{n}}$$

1- $\bar{D}_o = 0$

2- $n = 7$

سوف نقوم الآن بحساب الفروق ومتوسطها وكذلك الانحراف المعيارى لها:

اليوم	الفرق (d)	مربع الفرق (d^2)
١	١٣٠٠-	١٦٩٠٠
٢	٥٦٨-	٣٢٢٦٢٤
٣	١٨٠٠-	٣٢٤٠٠
٤	٩٠٤-	٨١٧٢١٦
٥	١٢٣٥-	١٥٢٥٢٢٥
٦	٦٩٥-	٤٨٣٠٢٥
٧	٦٣١-	٣٩٨١٦١
المجموع	٤٣٤٣-	٣٥٩٥٥٥١

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$\bar{d} = \frac{-4343}{7}$$

$$\bar{d} = -620.43 \qquad (1)$$

$$s_d = \frac{1}{n-1}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} d_i)^2}{n}}$$

$$s_d = \frac{1}{7-1}\sqrt{3595551 - \frac{(-4343)^2}{7}}$$

$$s_d = \frac{1}{6}\sqrt{901029.71}$$

$$s_d = \frac{1}{6}(949.23)$$

$$s_d = 158.2 \qquad (2)$$

$$t = \frac{-620.43}{158.2/\sqrt{7}}$$

$$t = -10.38 \qquad (3)$$

٣- نقوم الآن بحساب قيمة t الجدولية.

عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.05$) وبما أن الاختبار من طرفين فإن قيم t الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$t_{(n-1,\alpha/2)} = t_{(6,0.025)}$$
$$t_{(6,0.025)} = \pm 2.448 \qquad (4)$$

من (٣) و (٤) نجد أن قيمة t المحسوبة أصغر من قيمة t الجدولية، أى أن قيمة t تقع فى منطقة الرفض، أى أن متوسط مبيعات الفرعين (القاهرة والأسكندرية) غير متساو. وذلك عند مستوى معنوية ٥%.

٧-٥ اختبارات الفروض لنسبة المجتمع π

إذا كان المجتمع الذى نقوم بدراسته يتبع أحد التوزيعات المتقطعة مثل توزيع ذى الحدين، وإذا كانت نسبة ظاهرة معينة فى المجتمع هي π وكانت p هى نسبة الظاهرة فى العينة العشوائية التى تم سحبها من المجتمع. فإن المطلوب هو اختبار وجود فرق معنوى بين نسبة الظاهرة فى كل من العينة والمجتمع ويكون الفرض العدمى والفرض البديل على الصورة:

$H_o: \pi = \pi_o,$
$H_1: \pi \neq \pi_o,$
or $H_1: \pi < \pi_o,$
or $H_1: \pi > \pi_o$

وعليه فإن الإحصائية $\dfrac{p-\pi_o}{\sqrt{\dfrac{\pi_o(1-\pi_o)}{n}}}$ تتبع التوزيع الطبيعى القياسي، حيث n تمثل حجم العينة المسحوبة من المجتمع ومن ثم نقوم بحساب قيمة Z المحسوبة كالآتي:

$$Z = \frac{p-\pi_o}{\sqrt{\dfrac{\pi_o(1-\pi_o)}{n}}}$$

ثم يتم مقارنة Z المحسوبة بقيمة Z الجدلية حتى يمكن أن نتخذ القرار الإحصائى بقبول أو رفض الفرض العدمى كما ذكرنا من قبل عند اختبار المتوسط. وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٧): قامت إحدى شركات الكمبيوتر باستيراد شحنة من أجهزة الكمبيوتر وقد تعهدت الشركة المصدرة للأجهزة بأن نسبة الأجهزة المعيبة لن تزيد عن ٦%، تم إختيار عينة عشوائية من ١٨٠ جهاز وتبين وجود ٢٠ جهاز معيب. عند مستوى معنوية ١% اختبر مدى مصداقية هذه الشركة.

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$$H_o: \pi = 0.06$$
$$H_1: \pi > 0.06$$

٢- قيمة Z المحسوبة يتم ايجادها كالتالي:

$$Z = \frac{p - \pi_o}{\sqrt{\frac{\pi_o(1-\pi_o)}{n}}}$$

نسبة المعيب فى العينة هي:

$$p = \frac{20}{180}$$
$$p = 0.11$$
$$Z = \frac{0.11 - 0.06}{\sqrt{\frac{0.06(1-0.06)}{180}}}$$
$$Z = \frac{0.05}{\sqrt{\frac{0.06 \times 0.94}{180}}}$$
$$Z = \frac{0.05}{0.02}$$
$$Z = 2.5 \qquad (1)$$

نقوم الآن بايجاد قيمة Z الجدولية عند مستوى معنوية ١%:

$$Z_\alpha = Z_{0.01}$$
$$Z_{0.01} = 2.33 \qquad (2)$$

من (١) و (٢) نجد أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية عند مستوى معنوية ١%، ونتيجة لذلك نرفض فرض العدم الذى يدل على عدم مصداقية الشركة المصدرة للأجهزة.

٦-٧ اختبارات الفروض للفرق بين نسبتين $(\pi_1 - \pi_2)$

نريد الآن اختبار الفرق بين نسبتين فى عينتين لنرى هل هناك فرق بينهما أم لا؟ مثـل نـسبة التدخين بين الرجال والسيدات ونسبة المتعلمين بين الأولاد والبنات...إلخ. فإذا كانت p_1 و p_2 همـا نسبتان من عينتان مسحوبتان عشوائيا حجمهما على الترتيب n_1 و n_2 فإن توزيع المعاينة للفرق بـين النسبتين $p_1 - p_2$ يتبع التوزيع الطبيعى وتكون للإحصاءة Z الشكل التالي:

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)_0}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \qquad (1)$$

حيث:

$$\overline{P} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

الصيغة فى المعادلة (١) يمكن استخدامها عندما يكون فرض العدم على الصورة:

$$H_o : (\pi_1 - \pi_2) = 0$$

ويكون الفرض البديل على الصورة:

$$H_1 : (\pi_1 - \pi_2) \neq 0,$$
$$\text{or, } H_1 : (\pi_1 - \pi_2) > 0$$
$$\text{or, } H_1 : (\pi_1 - \pi_2) < 0$$

ولكن عندما يكون فرض العدم على الصورة:

$$H_o : (\pi_1 - \pi_2) = \pi, \qquad \pi \neq 0$$

يتم استخدام الإحصاءة التالية:

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}, \qquad (2)$$

يأخذ الفرض البديل الشكل التالي:

$$H_1 : (\pi_1 - \pi_2) \neq \pi,$$
$$\text{or, } H_1 : (\pi_1 - \pi_2) > \pi$$
$$\text{or, } H_1 : (\pi_1 - \pi_2) < \pi$$

وسوف نوضح ذلك بالأمثلة التالية:

مثال (٨): مجموعتان أ، ب تتكون كل مجموعة من ١٠٠ شخص مصابين بمرض معين، أراد باحث اختبار مصل ضد هذا المرض فتم إعطاء المصل للمجموعة أ، بينما المجموعة ب تم إعطاؤها العلاج المعتاد. وبعد فترة وجد أن ٨٠ شخص من المجموعة أ قد شفى بينما شفى ٦٢ شخص من المجموعة ب. اختبر الفرض بأن المصل يساعد على الشفاء أكثر من العلاج المعتاد، وذلك عند مستوى معنوية ٥%.

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$H_o: (\pi_1 - \pi_2) = 0,$
$H_1: (\pi_1 - \pi_2) > 0$

٢- قيمة Z المحسوبة يتم إيجادها كالتالي:

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)_0}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

$$p_1 = \frac{80}{100} = 0.8$$

$$p_2 = \frac{62}{100} = 0.62$$

$$\overline{P} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

$$\overline{P} = \frac{100 \times 0.8 + 100 \times 0.62}{100 + 100}$$

$$\overline{P} = \frac{142}{200}$$

$$\overline{P} = 0.71$$

$$Z = \frac{0.8 - 0.62 - 0}{\sqrt{0.71 \times 0.29(\frac{1}{100} + \frac{1}{100})}}$$

$$Z = \frac{0.18}{\sqrt{0.21 \times 0.02}}$$

$$Z = 2.78 \qquad (1)$$

٣- نقوم الآن بحساب قيمة Z الجدولية.

$$Z_\alpha = Z_{0.05}$$

$$Z_{0.05} = 1.65 \qquad (2)$$

من (١) و (٢) نجد أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية عند مستوى معنوية ٥% ونتيجة لذلك نقبل الفرض البديل الذى يدل على مدى فاعلية المصل.

مثال (٩): ينتج أحد المصانع سلعة ما من خلال وحدتين للإنتاج، فإذا اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠ وحدة من إنتاج الوحدة الأولى فوجد بها ١٢ وحدة معيبة. وتم إختيار ١٥٠ وحدة من إنتاج الوحدة الثانية فوجد بها ١٥ وحدة معيبة. اختبر الفرض القائل بأن الفرق بين نسبة الإنتاج التالفة لا يزيد عن ٠,٠٤ وذلك عند مستوى معنوية ٥%.

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$H_o: (\pi_1 - \pi_2) = 0.04,$

$H_1: (\pi_1 - \pi_2) < 0.04$

٢- قيمة Z المحسوبة يتم إيجادها كالتالي:

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

$$p_1 = \frac{12}{100} = 0.12$$

$$p_2 = \frac{15}{150} = 0.1$$

$$Z = \frac{(0.12 - 0.1) - 0.04}{\sqrt{\frac{0.12 \times 0.88}{100} + \frac{0.1 \times .09}{150})}}$$

$$Z = \frac{-0.02}{\sqrt{0.0011 + 0.0006}}$$

$$Z = -0.49 \qquad (1)$$

٣- نقوم الآن بحساب قيمة Z الجدولية.

$$Z_\alpha = -Z_{0.05}$$

$$Z_{0.05} = -1.65 \qquad (2)$$

من (١) و (٢) نجد أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية عند مستوى معنوية ٥% ونتيجة لذلك نقبل الفرض العدمى بأن الفرق بين نسبة الإنتاج المعيب يساوى ٠,٠٤.

تمارين

١- فى دراسة على متوسط أعمار الطلاب المتقدمون لشغل إحدى الوظائف أخذت عينة عشوائية من ٣٠ متقدم للوظيفة، فوجد أن متوسط أعمارهم ٢٥ سنة وذلك بانحراف معيارى ٥ سنوات. هل يمكن القول بأن متوسط أعمار جميع المتقدمين يساوى ٢٨ سنة وذلك فى ٩٥% من الحالات؟

٢- فى دراسة على نسبة المعيب فى أحد المنتجات أخذت عينة من ٥٠٠ وحدة فوجد أن عدد الوحدات المعيبة بها ١٠٠ وحدة. هل يمكن القول بأن نسبة المعيب فى هذا المنتج تختلف عن ١% وذلك عند مستوى معنوية ١٠%.

٣- فى دراسة على نسبة غياب العاملين فى قطاعين من قطاعات مؤسسة ما وجد أن نسبة الغياب فى القطاع أ هى ٣٠% فى حين أن نسبة الغياب فى القطاع ب هى ٣٥%. أخذت عينتان من نفس الحجم من القطاعين حجمها ١٠٠٠ عامل فوجد أن عدد الغائبين فى القطاع أ ٣٥٠ عامل بينما عدد الغائبين فى القطاع ب ٤٥٠ عامل. هل يمكن القول بأن نسبة الغياب الحقيقية فى القطاعين مختلفة وذلك كما أشارت البيانات، وذلك عند مستوى معنوية ١%.

٤- فى دراسة للمقارنة بين مجموعتين من الدارسين لتحديد مدى قدرتهم على التحصيل فى الأساليب المحاسبية الجديدة. أخذت عينة من ١٠٠ دارس من كل مجموعة فكانت النتائج على النحو التالي:

	العينة (أ)	العينة (ب)
متوسط القدرة	٨٠	٧٥
تباين العينة	٢٥	١٦

هل يمكن القول بأن متوسط درجة التحصيل متساوى فى المجموعتين؟

٥- إذا أردنا إجراء دراسة عن مدى فاعلية برنامجين لتدريب العاملين. أخذت عينة من المتدربين فى البرنامج الأول حجمها ٥٠ فكان متوسط الدرجات التى حصلوا عليها ١٥ درجة وذلك بانحراف معيارى ٣ درجات. كذلك أخذت عينة من المتدربين فى البرنامج الثانى حجمها ١٠٠ فكان متوسط الدرجات التى حصلوا عليها ١٢ درجة وذلك بانحراف معيارى ٤ درجات. هل يمكن الاستدلال بتكافؤ البرنامجين؟

٦- فى دراسة على نسبة الوحدات المعيبة التى تنتجها ماكينة غزل أخذت عينة من ٢٠٠ وحدة فوجد ٢٠ وحدة معيبة. فهل يمكن القول بأن نسبة المعيب فى إنتاج هذه الماكينة تختلف عن ١٢%؟ وذلك عند مستوى معنوية 5%.

٧- فى دراسة على خط إنتاج ينتج نوعين من الملابس أحدهما للأطفال والآخر للشباب، أخذت عينة عشوائية حجمها ٥٠ من كل خط فكانت نسبة المعيب فى خط الأطفال ١% وكانت نسبة المعيب فى خط الشباب ١,٥%، هل يمكن القول أن:

(أ) أن نسبة المعيب فى خط الأطفال تساوى نسبة المعيب فى خط الشباب؟

(ب) نسبة المعيب فى خط الأطفال مختلفة عن ٢%؟

اعتبر مستوى المعنوية ٥%.

٨- فى دراسة على مجموعة من الدارسين فى تخصص الحاسب والإدارة كانت لدينا النتائج التالية:

	الحاسب	الإدارة
حجم العينة	١٠٠	٨٠
متوسط الدرجات	١٥	١٨
الانحراف المعياري	٣	٢

هل يمكن القول عند درجة ثقة ٩٠% أن متوسط تحصيل الدارسين متكافيء؟

٩- فى دراسة على مجموعة من الطلاب فى المرحلة الأساسية أخذت عينة من ٥٠ طالب فوجد أن متوسط عمر الطالب ٧,٥ سنة وذلك بانحراف معيارى ٠,٢٥ هل يمكن القول أن متوسط عمر الطالب فى المرحلة الأساسية هو ٨ سنوات وذلك عند مستوى معنوية ٥%؟

١٠- إذا كان متوسط درجة التركيز فى المنتج (أ) هى ٠,٧ بانحراف معيارى ٠,١ وذلك لعينة من ١٢٠٠ عبوة للمنتج (أ). فى حين كان متوسط درجة التركيز فى المنتج (ب) هى ٠,٦ بانحراف معيارى ٠,٠٩ وذلك لعينة من ١٠٠٠ عبوة للمنتج (ب). هل يمكن القول بأن متوسط درجة التركيز فى المنتجين مختلفة وذلك فى ٩٠% من الحالات.